

Programme für die Berechnung von Wurzeln, Polynomen und Potenzreihen mit Handrechenmaschinen

Von Dr. H. Schilt, Biel

Gegenüber elektrischen Rechenmaschinen haben kleine Handrechenmaschinen den Vorteil der optischen Kontrolle. Diese besteht darin, dass man beim Drehen der Kurbel ein bestimmtes Zahlenwerk beobachten und den Rechnungsgang entsprechend den dort erscheinenden Zahlen richten kann, etwa indem man von Addition auf Subtraktion umstellt oder den Wagen versetzt. Die nachstehenden Ausführungen sollen dem Leser zeigen, dass sich mit dieser Methode Rechnungen bequem ausführen lassen, die mit elektrischen Maschinen nur in mehreren Schritten und mit Notieren von Zwischenergebnissen zu bewältigen sind. Wir beziehen unsere Ausführungen auf die «CURTA». Als kleinste Handrechenmaschine eignet sie sich besonders gut für diese Methode, weil man ihre Rechenwerke leicht überblicken kann¹⁾.

Wir geben zunächst eine kurze Beschreibung dieser Maschine, damit sich der Leser ein anschauliches Bild von den zu beschreibenden Operationen machen kann. Bild 1 zeigt die Maschine von der Seite und gibt zugleich die Bezeichnungen der einzelnen Teile; Bild 2 vermittelt eine Ansicht von oben. Wie ersichtlich, weist die «CURTA» drei verschiedene Zahlenwerke auf. Auf dem Zylindermantel befindet sich das Einstellwerk (abgekürzt EW). Durch Verschieben der Einstellgriffe kann man eine gegebene Zahl einstellen. Auf Bild 1 sieht man an der Einstellkontrolle, dass die Zahl 645'432 eingestellt ist. Durch Drehen der Kurbel wird diese Zahl ins Resultatwerk (RW, Bild 2) übertragen. Bei einer zweiten Drehung wird die gleiche Zahl nochmals übertragen, so dass nachher der doppelte Betrag im Resultatwerk steht. Im Umdrehungszählwerk (UW) wird die Anzahl der Kurbeldrehungen gezählt. Das Umdrehungszählwerk und das Resultatwerk befinden sich auf dem Rundwagen; dieser kann als Ganzes angehoben und gegenüber dem Einstellwerk um eine oder mehrere Stellen versetzt werden. Bei der Betätigung der Kurbel in einer neuen Position des Rundwagens wird daher die eingestellte Zahl, mit einer Potenz von 10 multipliziert, ins Resultatwerk übertragen, zugleich zählt das Umdrehungswerk die Umdrehung an der entsprechenden Dezimalstelle. Die Versetzbarkeit des Rundwagens ermöglicht nun eine bequeme

¹⁾ Die «CURTA» wurde von Curt Herzstark erfunden; sie wird von der Firma Contina AG., Vaduz, Fürstentum Liechtenstein, hergestellt und in den Handel gebracht. Diese Firma hat uns in verdankenswerter Weise die Bilder zur Verfügung gestellt.

Multiplikation der eingestellten Zahl mit einem mehrstelligen Faktor; diesen muss man durch Betätigung der Kurbel und Versetzen des Wagens im UW entwickeln, im RW kann man das Produkt ablesen. In den Bildern 1 und 2 sieht man beispielsweise die Einstellung und das Ergebnis der Multiplikation:

$$\begin{array}{r} \text{EW} \quad \text{UW} \quad \text{RW} \\ 645'432 \cdot 639,92 = 413'024'845,44 \end{array}$$

Die beiden Werke des Rundwagens können mit dem Löschering einzeln oder zusammen oder auch nur teilweise gelöscht (auf null gebracht) werden; dazu muss man den Rundwagen anheben und mit dem Ring über die Zahlenfenster fahren. Es werden nur jene Stellen gelöscht, über die sich der Ring hinwegbewegt hat.

Es ist ein besonderer Vorzug dieser kleinen Rechenmaschine, dass man mit ihr ebenso leicht subtrahieren wie addieren kann. Zum Subtrahieren braucht man nur die Kurbel um rd. 3 mm herauszuziehen und nachher zu drehen (gleicher Drehsinn wie bei der Addition!). Ausser der Subtraktion gestattet dies auch immer eine rasche Korrektur für den Fall, dass man die Kurbel zu oft gedreht hat; dabei ist es sehr angenehm, den Umdrehungssinn nicht ändern zu müssen.

Das Umdrehungszählwerk hat eine vollständige Zehnerübertragung und zählt die Subtraktion negativ. Es lässt sich ausserdem umschalten. Der Umschalthebel H befindet sich hinten und ist auf den Bildern nicht sichtbar. Schiebt man den Hebel nach unten, dann werden die subtraktiven Drehungen positiv gezählt und die additiven negativ.

Die Bilder 3 und 4 geben einen Einblick in die Maschine. Der wesentliche Bestandteil ist die Staffelwalze, die übereinander angeordnete Zahnreihen mit einer jeweils verschiedenen Anzahl von Zähnen besitzt. Beim Drehen der Kurbel wird die Walze mitgedreht und betätigt die Zahnräder der Uebertragungssachsen entsprechend den eingestellten Ziffern.

Die Subtraktion wird auf die Addition des Zehnerkomplementes zurückgeführt. Von irgend einer Zahl, die im RW steht, soll die Zahl $z = 971'853$ abgezogen werden; die CURTA addiert statt dessen die Zahl $\bar{z} = 10^{12} - 971'853 = 99'999'028'147$. Da das Resultatwerk nur 11 Ziffern aufweist, erscheint bei dieser Addition die vorderste 1 gar nicht, und der Rest der Ziffern ist genau gleich wie bei einer gewöhnlichen Subtraktion. Man nennt die Zahl \bar{z} das Zehnerkomplement zu z . Jede Ziffer von \bar{z} ergänzt sich mit der entsprechenden von z zu 9 mit Ausnahme der Einer, die sich zu 10 ergänzen. Bild 5 zeigt schematisch die Staffelwalze mit dem doppelten Zahnsystem, wie es von Curt Herzstark für die Durchführung dieser Subtraktionsmethode erstmals vorge-

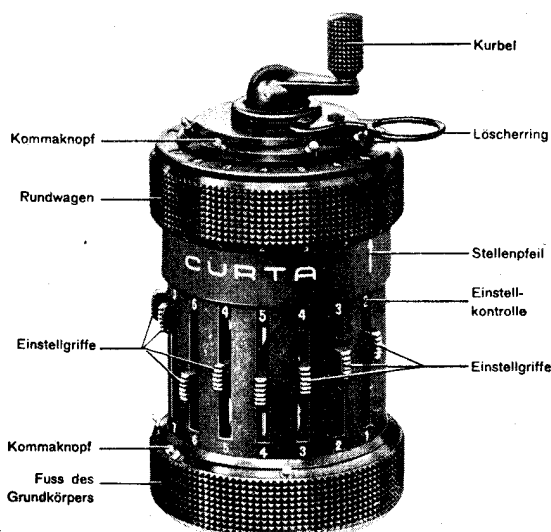


Bild 1 (links). Ansicht der Rechenmaschine von der Seite

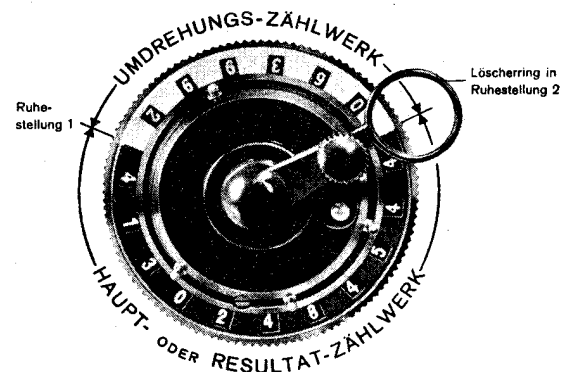


Bild 2 (rechts). Ansicht von oben

Bild 3 (links). Ansicht des aufgeschnittenen Werkes

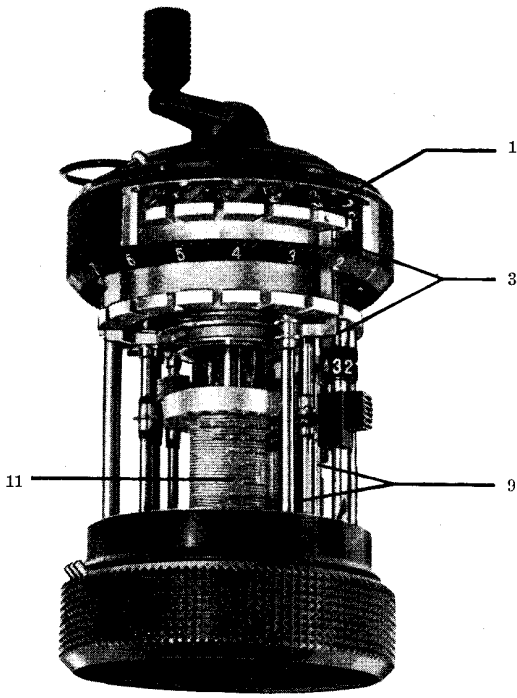
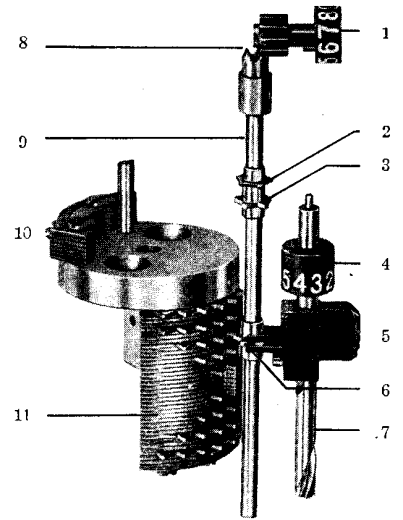


Bild 4 (rechts). Staffelwalze mit einer Uebertragungsachse und einer Einstellachse



- 1 Zahlenrolle mit Trieb
- 2 Sperrscheibe
- 3 Zehnerschaltung
- 4 Zahlenrolle der Einstellkontrolle
- 5 Einstellschieber
- 6 Einstellzahnrad
- 7 Einstellachse
- 8 Winkeltrieb
- 9 Uebertragungsachse
- 10 Zähne für Umdrehungszählwerk
- 11 Staffelwalze

schlagen wurde. Links sind schematisch die Uebertragungsachsen mit den Einstellrädern gezeichnet (eingestellte Zahl 971'853); in der Mitte sieht man die Lage der Staffelwalze für die Subtraktion, rechts die bei der Addition. Da die Einer beim Bilden des Zehnerkomplexes anders behandelt werden müssen als die übrigen Ziffern, hat die erste Uebertragungsachse zwei Zahnräder. Der Leser kann leicht selber abzählen, dass so jedesmal die richtige Anzahl Zahnschritte übertragen werden.

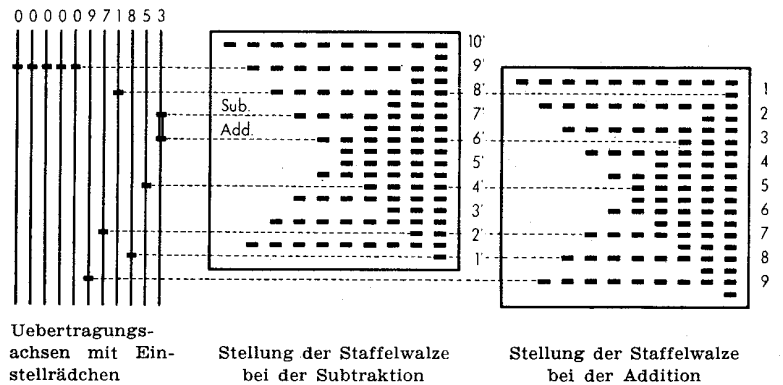


Bild 5. Schematische Darstellung der Wirkungsweise der Staffelwalze mit den zwei Zahnsystemen

Um dem Leser ein Rechenprogramm für eine besondere Rechnungsart mitzuteilen, benutzen wir eine einfache Symbolik, die wir an Beispielen zu den vier Grundoperationen erläutern. Der Uebersichtlichkeit halber werden wir in den Programmen und Beispielen nur das angeben, worauf der Rechner achten muss. Bleibt eine Einstellung eines Werkes oder eines Teiles davon unverändert, so wird die betreffende Zahl *nicht* wiederholt.

Addition und Subtraktion $a + b - c$

EW	H	UW	RW
000'000,00		000'00,0	00'000'000,000
<i>a</i>	↑	1 Plusdrehung	→ <i>a</i>
<i>b</i>		1 Plusdrehung	→ <i>a + b</i>
<i>c</i>	↓	1 Minusdrehung	→ <i>a + b - c</i>
		000'03,0	

Die Zeilenfolge gibt die zeitliche Entwicklung der Vorgänge. Die erste Zeile besagt, dass zu Beginn alle Zählwerke auf null stehen und dass über die Lage der Kommastellen geeignet verfügt wurde. In der zweiten Zeile wird angegeben, dass man die Zahl *a* ins Einstellwerk setzen und den Umschalthebel nach oben stellen soll. «1 Plusdrehung» bedeutet: Kurbel hineinstossen und einmal drehen, dabei soll der Rundwagen so stehen, dass diejenige Stelle im UW zählt, die über der «1» steht (im Beispiel: Position 2). Der horizontale Pfeil bedeutet «ergibt». Zeile 3 ist danach ohne weiteres verständlich. In Zeile 4 heisst es: «Stelle die Zahl *c* ein, Umschalthebel nach unten». «1 Minusdrehung» bedeutet: «Kurbel herausziehen und einmal drehen». Wenn man den Umschalthebel nach diesem Schema betätigt, ergibt das UW am Schluss die Anzahl der Posten.

Multiplikation $a \cdot b$

EW	H	UW	RW
000'000,00		000,000	000'000,000'00
<i>a</i>	↑	↓ <i>b</i>	→ <i>a · b</i>

Der Doppelpfeil bedeutet: Nach dem Einstellen der Zahl *a* und des Umschalthebels sehe man auf das Werk mit dem Doppelpfeil (hier UW) und betätige die Kurbel und den Rundwagen so, dass in diesem Werk die Zahl *b* zum Vorschein kommt.

Division p/q

Bei den meisten Maschinen wird die Division als fortgesetzte Subtraktion ausgeführt. Es hat dies den Nachteil, dass sowohl der Dividend als auch der Divisor nacheinander im EW eingestellt werden müssen, wie nachfolgendes Schema zeigt:

EW	H	UW	RW
000,000'00		00,0000	00,000'000'000
<i>p</i>		1 Plusdrehung	→ <i>p</i>
<i>q</i>	↓	00,0000	↓ 00,000
		<i>p/q</i>	← 00,000

Dank der optischen Kontrolle ermöglicht die CURTA eine andere Methode (Aufbaudivision), bei der nur der Divisor eingestellt werden muss:

EW	H	UW	RW
000,000'00		00,0000	00,000'000'000
<i>q</i>	↑		↓ <i>p</i>
		<i>p/q</i>	← <i>p</i>

Es ist offensichtlich, dass diese Divisionsmethode symmetrisch zur Multiplikationsmethode ist und schon deswegen oft Vorteile bietet.

Wir gehen nun zur Erklärung der im Titel angekündigten Rechenverfahren über.

Wurzelziehen:

Es sei $\sqrt[n]{R}$ zu berechnen. Man geht von einer Näherungslösung *N* aus und benutzt das Verfahren von Newton, um

einen verbesserten Näherungswert $N_1 = N + d$ zu finden. Dabei ist

$$d = \frac{R - N^n}{n N^{n-1}}$$

Der Wert N_1 ist immer zu gross und zwar etwa um den Betrag

$$r = \frac{(n-1)d^2}{2N}$$

Wenn $N < \sqrt[n]{R}$ ist, gilt jedoch:

$$N_1 - r < \sqrt[n]{R} < N_1$$

Für die Rechenmaschine können wir folgendes Programm aufstellen:

EW	H	UW	RW
000'000,00	↑	0,000'00	0000,000'0000
N		↓ N	N^2
		0,000'00	0000,000'0000
N^2	
		0,000'00	0000,000'0000
...		↓ n	$n N^{n-1}$ (aufschreiben!)
N^{n-1}		↓ N	N^n
		↓ N_1	R
$n N^{n-1}$			

Aufbaudivision auf die Differenz $(R - N^n)$! Da N schon im UW war, erscheint direkt der neue Näherungswert $N_1 = N + d$.

Das Verfahren kann mit dem neuen Näherungswert N_1 wiederholt werden; es konvergiert und lässt sich meistens sehr abkürzen, wenn man statt N_1 den besseren Näherungswert $N_1 - r$ nimmt.

Zahlenbeispiel:

Es sei $\sqrt[3]{786}$ zu berechnen. Mit einer Rechenscheibe oder einem Rechenschieber finden wir dafür den Näherungswert $N = 9,2$

EW	H	UW	RW
000'000,00	↑	0,000'00	0000,000'0000
9,2		↓ 9,2	84,64
		0,000'00	0000,000'0000
84,64		↓ 3	253,92
		0,000'00	0000,000'0000
253,92		↓ 9,2	778,688
		↓ 9,228'80	786,000(8960) $N_1 = 9,2288$

Eine Ueberschlagsrechnung ergibt $r = 0,0001$, so dass die letzte Ziffer von N_1 um etwa eine Einheit zu gross ist. In der Tat findet man als weitere Näherung für die Wurzel:

$$\sqrt[3]{786} = 9,228'7068$$

Polynome

Polynome rechnet man bekanntlich am einfachsten nach dem Schema von Horner aus. Dieses bietet auch für das Maschinenrechnen Vorteile. Das Programm für die Berechnung von

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

sieht folgendermassen aus:

EW	H	UW	RW
00.000'00,0	↑	0.000'00,	00'000,000'000
$x - 1$ A		1 Plusdrehung → A	A
		0.000'00,	
0,0		↓ A	Ax
B		1 Plusdrehung → A + B	Ax + B
		0.000'00,	
0,0		↓ Ax + B	(Ax + B)x
usw.

Im Resultatwerk steht nach jeder zweiten Operation ein Betrag, der mit x multipliziert werden muss; damit man das Resultatwerk nicht immer löschen muss, setzt man im EW statt x nur $x - 1$. Um auch im Einstellwerk diese Zahl nicht immer wieder löschen und neu einstellen zu müssen, setzt man $x - 1$ ganz links ins EW und addiert die Koeffizienten, wenn der Wagen ganz rechts steht. $x - 1$ wird dann ganz vorne ins RW übertragen, oder gar nicht übertragen, wie es z. B. bei der CURTA der Fall ist.

Ist ein Koeffizient negativ, so hat man in der betreffenden Zeile eine Subtraktion auszuführen (Minusdrehung). Ist $x - 1$ negativ, so wird man im UW beim Multiplizieren die entsprechende Zehnerergänzung hervorbringen, oder, was einfacher ist, den Umschalthebel nach unten setzen.

Beispiel:

Es sei $y = 0,025x^3 + 0,051x^2 - 3,12x - 12,75$ für $x = 12$ zu berechnen. Wir erhalten nacheinander folgendes Zahlenbild in der Rechenmaschine:

EW	H	UW	RW
00.00,0000	↑	0.00,000	00,000'000'000
11 0,025		1 Plusdrehung → 0,025	
		0.00,000	
0,000		↓ 0,025	0,300
0,051		1 Plusdrehung → 0,351	
		0.00,000	
0,000		↓ 0,351	4,212
3,12		1 Minusdrehung → 1,092	
		0.00,000	
0,00		↓ 1,092	13,104
12,75		1 Minusdrehung → 0,354	$y = 0,354$

Für den Wert $x = -4$ sieht das Bild der Berechnung des gleichen Polynoms wie folgt aus:

EW	H	UW	RW
00.00,0000	↓	0.00,000	00,000'000'000
5 0,025		1 Plusdrehung → 0,025	
		0.00,000	
0,000		↓ 0,025	99,900
0,051		1 Plusdrehung → 99,951	
		0.00,000	
0,000		↓ 9.99,951	00,196
3,12		1 Minusdrehung → 97,076	
		0.00,000	
0,00		↓ 9.97,076	11,696
12,75		1 Minusdrehung → 98,946	$y = -1,054$

Dreisatzrechnung

Um die Ausführungen über die Potenzreihen nicht unterbrechen zu müssen, schalten wir hier eine kurze Bemerkung über das Programm für die Berechnung eines Dreisatzes ein. Es sei $p = a \cdot q/b$ zu berechnen. Wenn die einzelnen Werke genügend Stellen umfassen (z. B. CURTA II), kann man diesen Dreisatz in einem Arbeitsgang bewältigen. Man teilt das Resultatwerk und das Einstellwerk durch Marken in zwei Teile. Links im EW setzt man den Nenner ein und rechts den einen Faktor des Zählers. Mit dem linken Teil des EW baut man links im RW den anderen Faktor des Zählers auf (Aufbaudivision). Das Resultat erscheint rechts im RW und das Resultat der Teildivision im UW.

Programm für die Berechnung des Dreisatzes $p = a/b \cdot q$

EW	H	UW	RW
0,000;000'00,00	↑	0000,0000	0,000'000;00,000'000
b	q	a/b	a
			p

Beispiel: $p = \frac{4,75 \cdot 28,52}{3,682}$

EW	H	UW	RW
0,000;000'00,00	↑	0000,0000	0,000'000;00,000'000
3,682 28,52			↓
		1,2901 ←	4,750(148) 36,793(652)

Auf fünf Ziffern gerundet ist daher: $p = 36,794$
 und $a/b = 4,73/3,682 = 1,2901$.

Bei der Berechnung ist auf die Doppelmarke «;» zu achten. Sobald man die Doppelmarke des RW über diejenige des EW versetzt, ist die letzte Stelle der linken Zahl im EW zu streichen. Die Methode ist völlig symmetrisch; wenn man den Dreisatz in die Proportion $a/b = p/q = k$ auflöst, so sieht man, dass sich die linke Zahl im RW zu derjenigen im EW verhält wie die rechte Zahl im RW zu derjenigen im EW. Im UW steht das gemeinsame Verhältnis k .

Potenzreihen

Es sei

$$s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}$$

eine Reihe, deren Summe man für ein bestimmtes x berechnen will. Aus den Koeffizienten bilden wir zunächst die Zahlen:

$$z_0 = \frac{a_0}{a_1}, \quad z_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad z_2 = \frac{a_2}{a_3}, \quad \dots \quad z_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Hierauf betrachten wir die Teilsummen s_n :

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1 x = s_0 + \frac{a_0 x}{z_0} = s_0 + \frac{s_0 x}{z_0}$$

$$s_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = s_1 + \frac{a_1 x}{z_1} x = s_1 + \frac{(s_1 - s_0) x}{z_1}$$

$$s_3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = s_2 + \frac{(s_2 - s_1) x}{z_2}$$

$$s_{n+1} = a_0 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} = s_n + \frac{(s_n - s_{n-1}) x}{z_n}$$

Man kann die Teilsummen nacheinander berechnen, indem man zu der bereits bekannten Summe s_n ein Glied von der Form

$$\frac{(s_n - s_{n-1}) x}{z_n} = \frac{p b}{q}$$

hinzufügt. Dieses Glied wird nach dem Schema der Berechnung eines Dreisatzes ausgeführt. Man sorgt dafür, dass man die Teilsumme s_n im linken Teil und s_{n-1} im rechten Teil des RW hat. Bei der Dreisatzrechnung baut man im rechten Teil aus der Summe s_{n-1} die Summe s_n auf, wobei links gleichzeitig die neue Teilsumme s_{n+1} erscheint. Sind einige oder alle z_n negativ, so setzt man die Zehnerergänzung der negativen z_n im EW ein. Das Umdrehungszählwerk braucht bei dieser Rechnungsart nicht beachtet zu werden. Doch findet aber der Leser den Zugang zu dieser Rechenmethode leichter, wenn er auch die Ergebnisse des UW vor sich hat, weshalb wir diese in den folgenden Beispielen hinzugefügt haben. Normalerweise fällt auch das Löschen des Umdrehungszählwerkes dahin.

Für Potenzreihen lautet das Programm daher:

EW		RW
000,000'000'00		0,000'0000;0,000'000
a_0	1 Plusdrehung	a_0
x		↓
z_0		$s_1 \leftarrow a_0$
z_1		↓
z_2		$s_2 \leftarrow s_1$
...		↓
usw.		$s_3 \leftarrow s_2$
...		...

Beispiel $e^{0,69}$

Die Reihe für e^x lautet bekanntlich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

für diese Reihe ist:

$$a_0 = 1; \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = 3 \quad \text{usw.}$$

Das Zahlenbild in der Maschine hat folgende Gestalt:

EW	H	UW	RW
000,000'000'00,		00000000	0,000'000'0;0,000'000
1		1 Plusdrehung	1
0,69	1	↑	↓
			1,69
	2		↓
		345	1,928'05
	3		↓
		7935	1,982'8015
	4		↓
		1369	1,982'81
70			↓
		89	1,992'2469
69	5		↓
		189	1,992'256
70			↓
		88	1,993'5496
69	6		↓
		21	1,993'506
70			↓
		7	1,993'6994
69	7		↓
		2	1,993'688
70			↓
		2	1,993'7146
	8		↓
		2	1,993'7160
			1,993'718

Das Ergebnis ist bis auf sechs Stellen $e^{0,69} = 1,993'716$

Bemerkungen: Die kursiven Zahlen notiert man sich auf einen Zettel; es sind die Teilsummen, auf die wir im nächsten Schritt jeweils die rechten Kolonnen des RW aufbauen müssen. In der ersten Position des Rundwagens würde die 9 von 0,69 über die Marke «;» hinübergreifen, weshalb man sie löschen muss (aufrunden!), sobald man in der 1. Position rechnet.

Wir fügen noch ein Beispiel für eine alternierende Reihe an. Dazu benutzen wir die Reihe für die Sinusfunktion

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \dots$$

Es ist hier $a_0 = u, x = u^2, z_0 = -6, z_1 = -20, z_2 = -42$
 Beispiel $\sin 22,35^\circ$.

$$u = \frac{22,35 \pi}{180} = 0,390'081'09 \quad x = u^2 = 0,152'163$$

Die Rechenmaschine zeigt folgende Zahlenbilder:

EW	H	UW	RW
00000000000		00000000	,000'000'00;0,000'0000
39008109		1 Plusdrehung	390'081'09
		00000000	↓
15216294	↓		36
59		6	↓
199		5	39
			↓
		01	006
49			↓
		3	78
9			↓
		5	380'188'44;390'0810
15219980	↑	00000000	↓
		5	38
499			↓
		495	018
9			↓
		46	380'263'71;380'1890
14999958	↓	00000000	↓
		2	273
9			↓
		18	0,380'263'45;380'2646

$\sin 22,35^\circ = 0,380'2635$

Bemerkung: Die Zehnerergänzung der Zahlen z_i (im EW kursiv gedruckt) bedingt eine Erniedrigung der letzten Ziffer von x um eine Einheit, falls diese nicht aufrundet werden muss. Wir müssen hier diejenigen Ziffern von x in 9 verwandeln, die über die Marke «;» des RW hinübergreifen.